Intégration sur un segment

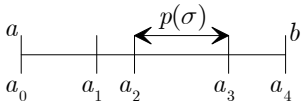
I. Fonctions continues par morceaux

Soit $a<b\in\mathbb{R}$.

1°) Subdivision d'un segment

Déf : On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$, toute famille finie de réels $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ telle que : $a=a_0<a_1<...<a_n=b$.

Les a_i sont alors appelés points de subdivision et les $]a_{i-1},a_i[$ sont appelés intervalles de subdivision.



Déf : Soit $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$.

On appelle pas de la subdivision σ le réel $p(\sigma)=\max\limits_{1\le i\le n}(a_i-a_{i-1})$.

Déf : Soit $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle support de σ l'ensemble : $\text{Supp}(\sigma)=\{a_0,a_1,...,a_n\}$.

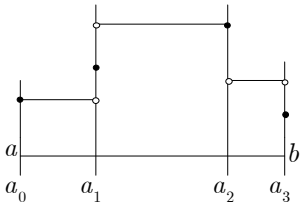
Déf : Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que σ est plus fine que σ' ssi $\text{Supp}(\sigma')\subset\text{Supp}(\sigma)$.

Déf : Soit σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$. On appelle réunion de σ_1 et σ_2 la subdivision σ de support $\text{Supp}(\sigma_1)\cup\text{Supp}(\sigma_2)$.

2°) Fonction en escalier

Déf : Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite en escalier ssi il existe $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ pour laquelle : $\forall 1\le i\le n$, f est constante sur $]a_{i-1},a_i[$.

Cette subdivision σ est alors dite adaptée à f.



Déf : On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop : Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Si f et g sont en escalier alors $\lambda.f, f+g, fg, |f|$ le sont aussi.

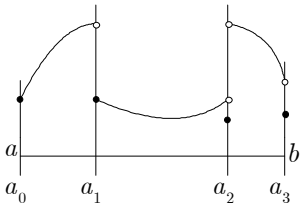
3°) Fonction continue par morceaux

Déf : Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux ssi il existe $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ pour laquelle :

$\forall 1\le i\le n$, f est continue sur $]a_{i-1},a_i[$ et

$\forall 1\le i\le n, \lim\limits_{a_{i-1}^+} f, \lim\limits_{a_i^-} f$ existent et sont finies.

La subdivision σ est alors dite adaptée à la fonction f.



Déf : On note $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop : Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si f et g sont continues par morceaux alors $\lambda.f, f+g, fg, |f|$ le sont aussi.

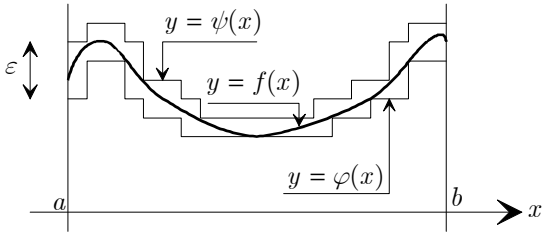
Prop : Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ y est bornée.

4°) Approximation par des fonctions en escalier

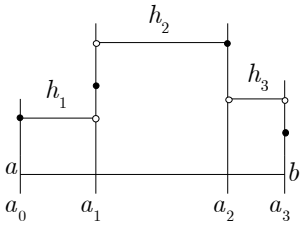
Théorème :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux.

$\forall\varepsilon>0, \exists\varphi,\psi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases}\varphi\le f\le\psi\\ 0\le\psi-\varphi\le\varepsilon\end{cases}$.



II. Construction de l'intégrale



1°) Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $a<b\in\mathbb{R}$.

a) définition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier. Soit $\sigma=(a_0,...,a_n)$ une subdivision adaptée à f.

$\forall 1\le i\le n$, posons h_i la valeur de f sur $]a_{i-1},a_i[$. On pose $I_\sigma(f)=\sum_{i=1}^{n}h_i(a_i-a_{i-1})$.

On peut montrer que $I_\sigma(f)$ est indépendante de la subdivision σ adaptée à f choisie.

Déf : Cette quantité est appelée intégrale de la fonction en escalier f sur $[a,b]$. On la note $I_{[a,b]}(f)$.

b) propriétés

Prop : Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier et $\lambda\in\mathbb{R}$. $I_{[a,b]}(\lambda.f)=\lambda.I_{[a,b]}(f)$ et $I_{[a,b]}(f+g)=I_{[a,b]}(f)+I_{[a,b]}(g)$.

Prop : Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier.

Si $f\ge 0$ alors $I_{[a,b]}(f)\ge 0$.

Si $f\le g$ alors $I_{[a,b]}(f)\le I_{[a,b]}(g)$.

Prop : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier et $c\in]a,b[$. $I_{[a,b]}(f)=I_{[a,c]}(f)+I_{[c,b]}(f)$.

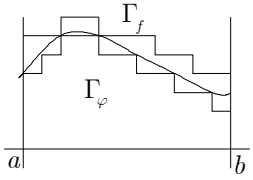
2°) Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

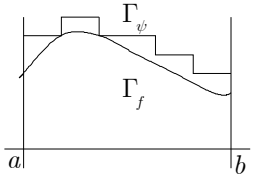
Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux.

Notons : $\Phi=\{\varphi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})/\varphi\le f\}$

et $\Psi=\{\psi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})/f\le\psi\}$.

Posons $I^-=\{I_{[a,b]}(\varphi)/\varphi\in\Phi\}$ et $I^+=\{I_{[a,b]}(\psi)/\psi\in\Psi\}$.





On montre l'existence et l'égalité de $\sup I^-$ et de $\inf I^+$.

Déf : Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a,b]$. On la note $\int_{[a,b]}f$ ou $\int_{[a,b]}f(t)\mathrm{d}t$.

3°) Propriétés de l'intégrale

Soit $a<b\in\mathbb{R}$.

a) linéarité

Théorème :

Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues par morceaux et $\lambda\in\mathbb{R}$. $\int_{[a,b]}\lambda f=\lambda\int_{[a,b]}f$ et $\int_{[a,b]}f+g=\int_{[a,b]}f+\int_{[a,b]}g$.

Cor : Si $f=g$ sauf en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}g$.

b) croissance

Théorème :

Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues par morceaux

Si $f\ge 0$ alors $\int_{[a,b]}f\ge 0$.

Si $f\le g$ alors $\int_{[a,b]}f\le\int_{[a,b]}g$.

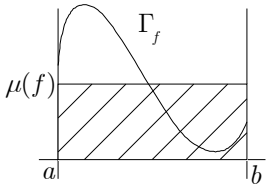
Cor : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. On a $\left|\int_{[a,b]}f\right|\le\int_{[a,b]}|f|$.

c) relation de Chasles

Théorème :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $c\in]a,b[$. $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f$.

d) inégalité de la moyenne



Déf : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\mu(f)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Théorème : (inégalité de la moyenne)

Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues par morceaux. $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} fg\right| \le \sup_{[a,b]}|f| \int_{[a,b]}|g|$.

e) inégalité de Cauchy Schwarz

Prop : Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues. $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \le \left(\int_{[a,b]} f(t)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_{[a,b]} g(t)^2\mathrm{d}t\right)$.

4°) Extension

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Déf : Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux ssi f est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ avec $a<b\in I$. On note $\mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $a,b\in I$.

On définit $\displaystyle\int_a^b f$ (ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$) par : $\displaystyle\int_a^b f=\begin{cases}\displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a<b\\ 0 & \text{si } a=b\\ \displaystyle-\int_{[b,a]} f & \text{si } a>b\end{cases}$

Théorème :

Soit $f,g:I\to\mathbb{R}$ continues par morceaux et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Pour tout $a,b\in I$ on a $\displaystyle\int_a^b \lambda f+\mu g=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$.

Théorème :

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $a,b,c\in I$. $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

III. Primitives et intégrales

Soit I un intervalle non singulier

1°) Primitives d'une fonction

Déf : On appelle primitive d'une fonction $f:I\to\mathbb{R}$, s'il en existe, toute fonction $F:I\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $F'=f$.

Prop : Si $f:I\to\mathbb{R}$ admet une primitive F alors l'ensemble des primitives de f est constitué des fonctions de la forme $t\mapsto F(t)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$

Déf : On note : $\displaystyle\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C^{te}$ pour signifier que F est une primitive de f et pour *Prop :* Soit $f,g:I\to\mathbb{R}$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Si F et G sont primitives de f et g alors $\lambda F+\mu G$ est primitive de $\lambda f+\mu g$. Ainsi $\displaystyle\int \lambda f(t)+\mu g(t)\mathrm{d}t=\lambda\int f(t)\mathrm{d}t+\mu\int g(t)\mathrm{d}t$.

2°) Primitives de fonctions usuelles

$f(t)$	$\int f(t)\mathrm{d}t$	I
t^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{t^{n+1}}{n+1} + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{t^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}} + C^{te}$	$\mathbb{R}^+ *$ ou $\mathbb{R}^- *$
t^α avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}t^\alpha + C^{te}$	$\mathbb{R}^+ *$
$\frac{1}{t}$	$\ln\lvert t\rvert + C^{te}$	$\mathbb{R}^+ *$ ou $\mathbb{R}^- *$
e^t	$\mathrm{e}^t + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\ln t$	$t\ln t - t + C^{te}$	$\mathbb{R}^+ *$
$\sin t$	$-\cos t + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\cos t$	$\sin t + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, t$	$\mathrm{ch}\, t + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, t$	$\mathrm{sh}\, t + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\arctan t + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-t^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+t}{1-t}\right\rvert + C^{te}$	$]-\infty,-1[,]-1,1[$ et $]1,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin t + C^{te}$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C^{te}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$	$\ln\left\lvert t+\sqrt{t^2-1}\right\rvert + C^{te}$	$]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$

3°) Intégration par primitivation

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

f possède une unique primitive qui s'annule en a, c'est la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Cor : Toute fonction réelle continue sur un intervalle I y admet des primitives.

Cor : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f. $\forall a,b \in I, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

4°) Positivité de l'intégrale d'une fonction continue

Théorème :

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue, positive et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

En particulier :

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Si $\int_a^b \lvert f(t)\rvert \mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

Si $\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

Cor : Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue.

Si $f\geq 0$ et $f\neq 0$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$.

Si $f\leq 0$ et $f\neq 0$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t<0$.

Cor : Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue.

Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$ alors $f=0$ ou bien f prend une valeur strictement positive et une valeur strictement négative. Dans les deux cas : $\exists c\in]a,b[, f(c)=0$.

5°) Fonction définie par une intégrale

Pour dériver une fonction définie par $g(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ avec f fonction continue, on introduit F primitive de f et on a alors $g(x)=F(v(x))-F(u(x))$ qui permet d'obtenir $g'(x)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$.

IV. Intégration par parties

Soit I un intervalle non singulier.

1°) Primitivation par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables sur I.
uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$.
Ainsi $\int u'v=\int (uv)'-uv'=uv-\int uv'$.

2°) Détermination de $\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$

Soit P une fonction polynomiale de degré $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$*.
2 méthodes usuelles :
(1) Par ipp successives :

$$\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}\int P'(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{\alpha}P(x)-\frac{1}{\alpha^2}P'(x)+\ldots+\frac{(-1)^n}{\alpha^{n+1}}P^{(n)}(x)\right)\mathrm{e}^{\alpha x}+C^{te}$$

(2) D'après l'étude ci-dessus :
$\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x=Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}+C^{te}$ avec Q fonction polynomiale de degré n.
On peut alors chercher Q par coefficients inconnus de sorte que :
$(Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x})'=(Q'(x)+\alpha Q(x))\mathrm{e}^{\alpha x}=P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$.

3°) Détermination de $\int P(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$ et $\int P(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$

Soit P une fonction polynomiale de degré $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Détermination de $\int P(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$.
2 méthodes usuelles :
(1) Par ipp successives : $\int P(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}P(x)\sin\alpha x-\frac{1}{\alpha}\int P'(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x=\ldots$
(2) Par l'étude ci-dessus : $\int P(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x=A(x)\cos(\alpha x)+B(x)\sin(\alpha x)+C^{te}$ avec A, B fonctions polynomiales de degrés inférieurs à n. On peut alors chercher A et B par coefficients inconnues de sorte que :
$\left(A(x)\cos\alpha x+B(x)\sin\alpha x\right)'=P(x)\cos\alpha x$
Détermination $\int P(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$: idem

4°) Intégration par parties

Théorème :

Soit $u,v:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a,b\in I$.

$\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$.

V. Changement de variables

Soit I et J des intervalles non singuliers

1°) Idée

Soit $u:I\to J$ et $F:J\to\mathbb{R}$ dérivables. $F\circ u$ est dérivable et $(F\circ u)'=u'\times F'\circ u$.

On note encore $(F(u))'=u'F'(u)$. Ainsi $\int u'F'(u)=F(u)+C$.

En particulier :

Pour $n\in\mathbb{N}$, $\int u'u^n=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C^{te}$,

Pour $n\in\mathbb{N},n\geq 2$, $\int\frac{u'}{u^n}=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}+C^{te}$,

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $\int u'u^\alpha\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C^{te}$ (en particulier $\alpha=\pm 1/2$).

$\int\frac{u'}{u}=\ln|u|+C^{te}$, $\int u'\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^u+C^{te}$, $\int u'\sin u=-\cos u+C^{te}$, $\int u'\cos u=\sin u+C^{te}$,

$\int u'\,\mathrm{sh}\,u=\mathrm{ch}\,u+C^{te}$, $\int u'\,\mathrm{ch}\,u=\mathrm{sh}\,u+C^{te}$,

$\int\frac{u'}{1+u^2}=\arctan u+C^{te}$.

2°) Primitivation par changement de variables

Soit $u:I\to J$ dérivable et $f:J\to\mathbb{R}$ possédant une primitive F.

On a $\int u'(t)f(u(t))\mathrm{d}t=F(u(t))+C^{te}$. Pour exploiter cette formule, on écrit :

$x=u(t)$, $\mathrm{d}x=u'(t)\mathrm{d}t$: $\int u'(t)f(u(t))\mathrm{d}t=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C^{te}=F(u(t))+C^{te}$.

Lors de cette manipulation, on dit qu'on a réalisé le changement de variable défini par la relation $x=u(t)$.

3°) Intégration par changement de variables

Théorème :

Soit $u:I\to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f:J\to\mathbb{R}$ continue.

$\forall a,b\in I,\int_a^b f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t=\int_{u(a)}^{u(b)}f(x)\mathrm{d}x$.

4°) Changement de variables affines

a) principe

Les changements de variables affines sont ceux de la forme $x=\alpha t+\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\alpha\neq 0$.

b) propriétés géométriques

Prop : Soit $\tau\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. $\forall a,b\in\mathbb{R},\int_a^b f(t+\tau)\mathrm{d}t=\int_{a+\tau}^{b+\tau}f(t)\mathrm{d}t$.

Prop : Soit $a>0$ et $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ continue.

Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.

Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=0$.

Prop : Soit $T>0$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et T périodique. $\forall a\in\mathbb{R},\int_a^{a+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

VI. Méthodes d'approximation d'intégrales

Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Notre objectif est d'approcher numériquement $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

1°) Par les sommes de Riemann

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall 0\le k\le n, a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

$R_n^+=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)=\dfrac{b-a}{n}\big(f(a_1)+\cdots+f(a_n)\big)$ et $R_n^-=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)=\dfrac{b-a}{n}\big(f(a_0)+\cdots+f(a_{n-1})\big)$

Déf : R_n^+ (resp. R_n^-) est appelée somme de Riemann associée aux rectangles à droites (resp. à gauche) de la fonction f.

Théorème :

Si f est k lipschitzienne (en particulier si f est $\mathcal{C}^1$) alors $R_n^+, R_n^-\to\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

En particulier : Pour $a=0$ et $b=1$.

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(t)\,dt$ et $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2°) Méthode des trapèzes

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall 0\le k\le n, a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{b-a}{2n}(f(a_{k-1})+f(a_k))=\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a_0)}{2}+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1})+\dfrac{f(a_n)}{2}\right)$.

Théorème :

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $T_n=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+O(1/n^2)$ l'erreur est un $O\left(1/n^2\right)$.

3°) Méthode de Simpson

$S_n=\dfrac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}f(a_{k-1})+4f\left(\dfrac{a_{k-1}+a_k}{2}\right)+f(a_k)$.

Théorème :

Si f est de classe $\mathcal{C}^3$ alors $S_n=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+O(1/n^3)$ l'erreur est un $O\left(1/n^2\right)$.

VII. Extension aux fonctions complexes

Soit I un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$. Les définitions qui suivent prolongent les définitions réelles.

1°) Construction de l'intégrale d'une fonction complexe

Déf : On dit que $f:I\to\mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On note $\mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions.

Déf : Soit $f:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux et $a,b\in I$.
On appelle intégrale de la fonction f de a à b le complexe :
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\mathrm{d}t+i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\mathrm{d}t$.

Prop : Soit $f,g:I\to\mathbb{C}$ continues par morceaux, $\lambda\in\mathbb{C}$ et $a,b\in I$.

$\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f$, $\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$ et $\int_a^b \overline{f}=\overline{\int_a^b f}$.

Prop : Soit $f:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux et $a,b,c\in I$. $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Théorème :

Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.

2°) Intégration et dérivation

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$, on appelle primitive de f s'il en existe toute fonction $F : I \to \mathbb{C}$ dérivable telle que $F' = f$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et $a \in I$.

f possède une unique primitive s'annulant en a , c'est la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Cor : Si F est une primitive de f alors $\forall a,b \in I, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b$.

VIII. Formules de Taylor

I désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

1°) Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$. Pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

soit encore $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$

Le terme polynomial $\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ est appelée partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre n en a . Le terme $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ est appelé reste intégral de ce développement.

2°) Inégalité de Taylor Lagrange

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$.

On suppose : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$.

On a $\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$.